

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)**ScienceDirect**

Procedia - Social and Behavioral Sciences 196 (2015) 113 – 119

**Procedia**  
Social and Behavioral Sciences

International Conference on University Teaching and Innovation, CIDUI 2014, 2-4 July 2014,  
Tarragona, Spain

## Aprendiendo a enseñar matemáticas a partir de la propia experiencia

Lluís Albarracín<sup>a,\*</sup>, Judit Chico<sup>a</sup>, Marc Guinjoan<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.  
Facultat de Ciències de l'Educació, Edifici G5.  
08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès), Spain*

---

### Abstract

An experience of educational innovation in teaching and learning mathematics with primary student teachers is presented in this report. The obtained data point out the power of emulating Fermi problem solving activities as an alternative to lectures. Our aim is to promote reflection on the characteristics of primary students' mathematical learning and classroom management.

© 2015 The Authors. Published by Elsevier Ltd. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Peer-review under responsibility of the Scientific Committee of CIDUI Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació.

**Keywords:** mathematical learning; pre-service teacher training; primary education; Fermi problems; estimation.

---

### Resumen

En este artículo se presenta una experiencia de innovación docente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con alumnos del Grado de Educación Primaria. Los resultados de la experimentación indican el potencial de emular una actividad de resolución de problemas de Fermi para alumnos de primaria como alternativa a la clase magistral. El objetivo es reflexionar sobre las características del aprendizaje matemático de los alumnos y la gestión del aula.

**Palabras clave:** aprendizaje matemático; formación inicial del profesorado; educación primaria; problemas de Fermi; estimación.

---

\* Corresponding author. Tel.: +34 93 581 26 49.

E-mail address: [lluis.albarracin@uab.cat](mailto:lluis.albarracin@uab.cat), [judit.chico@ub.edu](mailto:judit.chico@ub.edu), [marc.guinjoan@uab.cat](mailto:marc.guinjoan@uab.cat)

## 1. Introducción

A lo largo de los años se ha intentado caracterizar el conocimiento del profesor sobre los contenidos que enseña atendiendo a las necesidades específicas de la enseñanza. Shulman (1986) planteó el conocimiento de los profesores centrándose en el rol del contenido en la enseñanza y sugirió distinguir tres tipos de conocimiento del contenido de los maestros: el conocimiento del contenido específico, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular.

En el caso específico del profesor de matemáticas, Ball et al. (2008) siguiendo el trabajo de Shulman, dividieron el conocimiento del contenido en dos áreas principales: el conocimiento matemático y el contenido didáctico en matemáticas. Dentro de esta última, se destacaron tres aspectos: el conocimiento de la enseñanza en matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje matemático de los alumnos y el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas basados en el currículo.

Por otro lado, la formación inicial del profesorado de primaria es concebida, no sólo como un proceso de cambio cognitivo para su posterior desarrollo profesional, sino también como de cambio conceptual y contextual. A lo largo de los cuatro años de su formación inicial, se pretende que los estudiantes de Educación Primaria (EEP) se cuestionen su propio bagaje escolar y recontextualicen su futura práctica a partir de lo aprendido (Ensor, 2001). Así, las tareas matemáticas que se propongan a los EEP durante su formación inicial deben propiciar la generación y adquisición de una nueva cultura matemática escolar que minimice el impacto de concepciones y creencias propias de una vieja cultura matemática escolar derivada de su experiencia como aprendices. Para ello además del contenido matemático de las tareas, se debe considerar cómo los EEP pueden acceder a ese contenido (Sánchez & García, 2009).

En el contexto de una asignatura de didáctica de las matemáticas del Grado de Educación Primaria, el equipo docente se propuso combinar el trabajo sobre la gestión del aula y el estudio del conocimiento de las características del aprendizaje matemático de los alumnos. Para ello se diseñó y se implementó una actividad basada en resolución de problemas fácilmente extrapolable a un aula de primaria. Esta situación de aprendizaje permitió reflexionar sobre la gestión del aula y profundizar sobre diferentes formas de aprendizaje de alumnos de primaria a partir de la propia experiencia de los EEP como resolutores en el aula. Concretamente, nuestra propuesta es plantear una situación de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que fomente la exploración de ideas, la elaboración de conjeturas, la comparación de procesos y la comunicación de razonamientos matemáticos. En definitiva, una actividad colaborativa como las que se espera que los futuros maestros implementen y gestionen durante su posterior práctica profesional.

En este contexto, los objetivos del presente trabajo son:

- Presentar una propuesta de innovación docente que permita a los EEP, a través de su propia vivencia, reflexionar sobre las características del aprendizaje matemático de los alumnos y la gestión del aula de matemáticas.
- Presentar resultados de la experiencia de innovación docente a partir de las producciones de los propios EEP.

## 2. Fundamentación

La experiencia de innovación docente se implementó en tres grupos (247 estudiantes) de la asignatura ‘Gestión e innovación en el aula de matemáticas’ que se imparte en el tercer curso del grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. En esta asignatura se trabajan contenidos horizontales referentes a la gestión e innovación en el aula que se relacionan con contenidos matemáticos específicos enmarcados en tres bloques: geometría, números racionales y medida y estimación. Dentro del contenido de medida y estimación, se diseñó una actividad con trece cuestiones basadas en Problemas de Fermi en los que se estiman grandes cantidades (ver ejemplo en la Figura 1). Ärlebäck (2009) define los Problemas de Fermi como problemas abiertos que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación planteada y estimen diferentes cantidades relevantes para acabar relacionándolas a partir de cálculos sencillos. Por lo tanto, los Problemas de Fermi se caracterizan por su forma de resolución, involucrando estimaciones parciales de cantidades esenciales.

El problema de Fermi que se utiliza como ejemplo clásico es el de estimar el número de afinadores de piano que hay en Chicago a partir de estimar datos como la población total de Chicago, la proporción de familias de Chicago que pueden tener piano o el tiempo necesario para afinar un piano. Se pueden encontrar los detalles de la resolución

completa en Efthimiou y Llewellyn (2007). El trabajo con problemas de Fermi puede introducirse en diferentes niveles ajustando la dificultad de los problemas. Årlebäck (2009) ha confirmado que para su resolución no se requiere ningún tipo específico de conocimiento matemático previo y, dado que los estudiantes están obligados a estimar varias cantidades por sí mismos (ya que los problemas no ofrecen datos numéricos), se les anima a discutir el proceso de resolución con sus compañeros. Carlson (1997) describe el proceso de resolución de un problema de Fermi como "the method of obtaining a quick approximation to a seemingly difficult mathematical process by using a series of educated guesses and rounded calculations" (p. 308). De esta forma los problemas de Fermi permiten trabajar con diferentes tipos de estimaciones y suponen una forma de introducir los procesos de modelización matemática en las aulas (Albarracín & Gorgorió, 2013).

Otro argumento para la introducción de problemas de Fermi en las aulas de Educación Primaria es la posibilidad de utilizarlos como vínculo entre las matemáticas y otras materias escolares, acercando a los estudiantes a diferentes tareas interdisciplinarias (Sriraman & Lesh, 2006). También permiten incorporar diferentes problemáticas sociales de interés, como estimaciones de agua potable consumida, consumos de gasolina u otros combustibles, cantidades de comida desechadas y otros tipos de problemas de tipo ecológico (Sriraman & Knott, 2009).

### 3. Descripción de la actividad propuesta

A modo de ejemplo de los problemas de Fermi utilizados en la actividad descrita, la Figura 1 muestra dos de los trece problemas planteados en la secuencia de problemas de la actividad llevada a cabo.



	<p><b>Problema 3.a</b> ¿Cuántas personas se pueden cobijar debajo del puente?</p>
	<p><b>Problema 6.a</b> ¿Cuántos ladrillos forman la fachada de este edificio?</p>

Fig. 1. Muestra de dos problemas utilizados en la actividad propuesta

Todos los problemas propuestos en la actividad aluden a espacios o edificios próximos a la facultad de Ciencias de la Educación en la que estudian los EEP. En concreto, se trata de una secuencia de trece preguntas que actúan como enunciados de un problema de Fermi. En los enunciados de cada cuestión se facilitó una imagen de la localización a la que hacen referencia. Más allá de facilitar la realización de la actividad, las magnitudes a estimar hacen referencia a objetos extrapolables a un colegio: la altura de una fachada o de un árbol, las personas que caben en un patio o un aparcamiento o los ladrillos de necesarios para construir un edificio.

La experimentación de la actividad se llevó a cabo en grupos de cuatro alumnos en una sesión de tres horas que se distribuyó de la siguiente manera:

- Primera parte: una hora y media en el exterior del aula con el objetivo de tomar medidas (si lo consideraban necesario) y anotar las estrategias de estimación para cada problema.
- Segunda parte: una hora y media en el aula regular para formalizar las estrategias y hacer los cálculos que se consideraran necesarios.

De forma regular, los alumnos trabajan en grupo las tareas asociadas a esta asignatura. Así están acostumbrados a expresar sus ideas y debatir la validez de las mismas. En el tiempo dado para la actividad los grupos no resuelven todos los problemas propuestos, el objetivo de proporcionar un gran número de estos es permitir que los EEP se repartan en los diferentes espacios y que puedan observar que métodos y estrategias similares se adaptan a diferentes problemas.

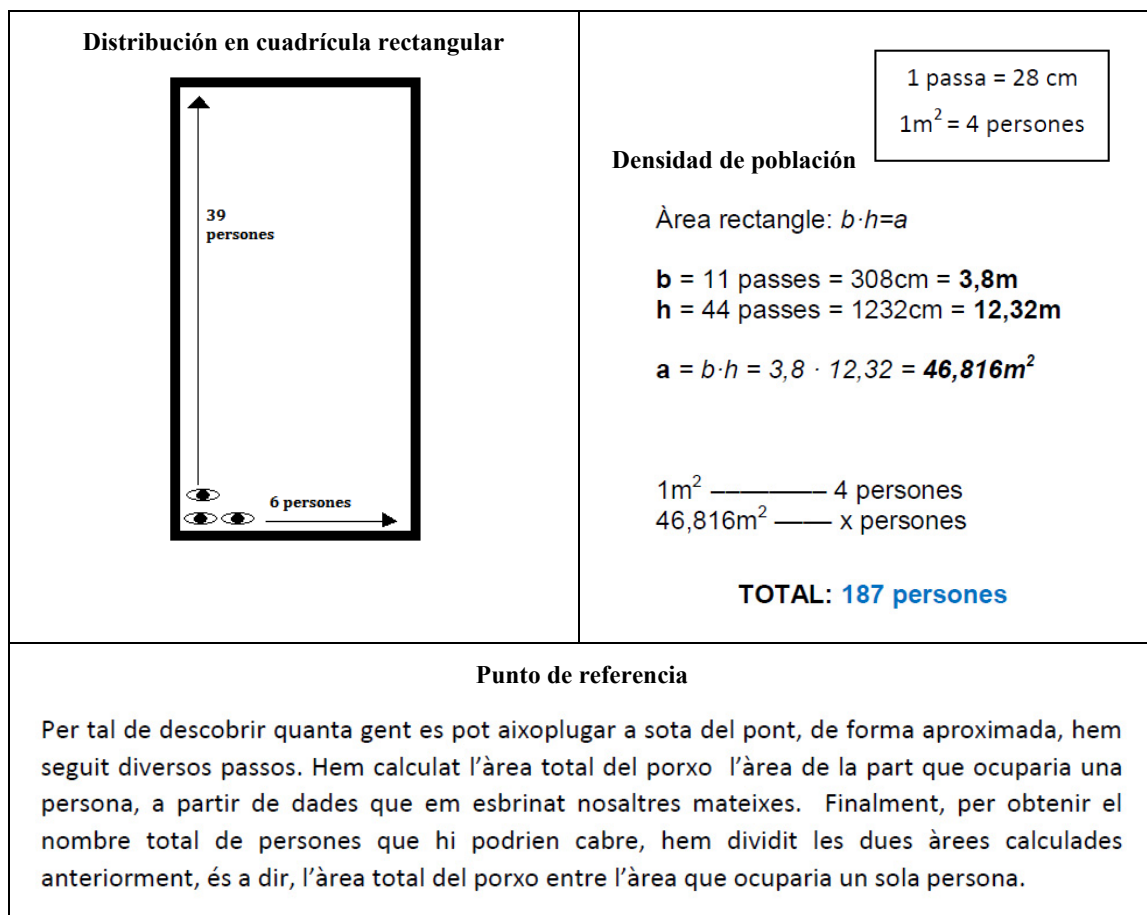


Fig. 2. Ejemplos de resoluciones de EPP

En la sesión posterior se realizó una puesta en común con todo el grupo clase para debatir la adecuación de las estrategias utilizadas. En concreto se incidió en la comparación de las diferentes formas de resolución propuestas, su eficiencia, los factores que introducen desviaciones en las estimaciones y la reflexión sobre qué estrategias eran extrapolables a alumnos de primaria. Este último factor es clave para la formación de los EEP en relación al conocimiento de las características del aprendizaje matemático de los alumnos (Ball et. al., 2008). Para la preparación de esta sesión el equipo docente disponía de información previa extraída de un trabajo de investigación anterior donde se analizan resoluciones de estudiantes de Secundaria a este tipo de problemas. En ese estudio se detectaron las siguientes estrategias de resolución que incluían elementos de modelización matemática (Albarracín & Gorgorió, 2014):

- *Densidad de población*, en la que se establece la superficie o volumen total en la que se distribuyen los objetos y se determina una densidad de población para ellos a partir de la experimentación en espacios reducidos.
- *Punto de referencia*, en la que se establece la superficie o volumen total en la que se distribuyen los objetos y se divide por la cantidad de superficie o volumen media que ocupa cada uno de los objetos.
- *Distribución en cuadrícula rectangular*, el modelo propone que la cantidad de objetos a estimar se puede distribuir siguiendo un patrón de cuadrícula con lo que se deben determinar el número de filas y columnas de objetos que llenarían el espacio. Finalmente se multiplican las dos cantidades obtenidas.

En la Figura 2 se exponen a modo de ejemplo tres resoluciones de grupos diferentes de EEP al problema 3.a mostrado en la Figura 1.

La puesta en común se centró en la comparación de diferentes resoluciones con el objetivo de identificar diferentes estrategias de resolución y poner de manifiesto las resoluciones que no están al alcance de alumnos de Educación Primaria por su contenido matemático.

#### 4. Resultados

La experiencia sirvió como ejemplo de organización y gestión de una actividad colaborativa de resolución de problemas de matemáticas. Más allá de transmitir las características de este tipo de actividad a partir de una clase magistral, los EEP reflexionan sobre su propia experiencia como resolutores para analizar características del aprendizaje matemático de alumnos de Primaria. Así, en la puesta en común se consolidaron los siguientes aspectos de conocimiento especializado del contenido matemático sobre los problemas utilizados y la gestión del aula:

- Cada uno de los problemas de Fermi propuestos permite ser resuelto utilizando diferentes estrategias. Estas estrategias son variantes de algunas de las descritas en Albarracín & Gorgorió (2014): densidad de población, punto de referencia y distribución en cuadrícula rectangular. Esto permite tratar concepciones de los alumnos de Primaria sobre la resolución de problemas, ya que el trabajo convencional en las aulas los lleva a considerar que los problemas tienen una única forma de resolverse.
- Las estrategias utilizadas se pueden adaptar a diferentes situaciones introduciendo modificaciones adecuadas. Es importante para los EEP que consideren el contexto concreto en el que se plantea cada problema y que diferencien la naturaleza propia de los objetos a estimar. Por ejemplo, se pueden contar baldosas en el suelo y ladrillos en la pared dividiendo la superficie cubierta entre la superficie que tapa una baldosa o ladrillo, pero en general las baldosas recubren el plano sin dejar espacios entre ellas y para unir los ladrillos en una pared se requiere que el cemento ocupe una parte de esa superficie. Estos ajustes requieren de un conocimiento previo de las características que afectan a las estimaciones de los objetos a cuantificar en cada problema. Estas modificaciones en las estrategias de resolución que se derivan del contexto específico del problema de estimación, suponen un aumento de la dificultad para un alumno de Primaria. Así, es una característica a tener en cuenta en el diseño y secuenciación de este tipo de actividades en el aula de Primaria así como en el nivel específico en el que se llevan a cabo.
- El conocimiento a priori de las diferentes estrategias para resolver estos problemas así como su adaptación a nuevas situaciones se valora como un elemento clave para la gestión del aula. Los EEP observaron que las acciones docentes para guiar una clase de resolución de problemas y una puesta en común requieren de un conocimiento amplio del contenido matemático involucrado en la actividad. Este conocimiento permite al

docente actuar como guía en las discusiones matemáticas, mediante la realización de preguntas que apuntan a ciertos contenidos o acciones matemáticas.

- El trabajo colaborativo en grupo se valora como un espacio que estimula la autonomía de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En consonancia con los resultados obtenidos en Chico (2014), los EEP remarcan que el grupo ayuda a construir un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes se ven abocados a argumentar y comunicar sus ideas matemáticas. Tanto el trabajo en grupo como la puesta en común son considerados como elementos que ayudan a la adquisición de la competencia matemática de los estudiantes de Primaria. Se puntualiza la necesidad de asignar roles a los alumnos de Primario dentro de grupos de trabajo.

Por último, los EEP respondieron un cuestionario con preguntas concretas sobre el desarrollo de la actividad y la adecuación y adaptabilidad de la actividad a clases de Educación Primaria. A continuación se exponen las tres ideas básicas que emergen de las respuestas de los EEP, que muestran directrices para planificar el trabajo futuro a realizar siguiendo esta experiencia:

- Se les pidió que ofrecieran el enunciado de dos problemas similares a los utilizados en la actividad. En general, los EEP proponen problemas del mismo tipo pero sin generar propuestas que incluyan nuevos elementos en su resolución.
- Los EEP manifiestan haber detectado carencias en su formación matemática para poder resolver algunos de los problemas o comparar diferentes estrategias de resolución. Afirman que realizar la actividad ha puesto de manifiesto que la gestión del aula requiere de conocimientos matemáticos y conocimientos didácticos específicos.
- Los EEP muestran el convencimiento adquirido sobre la potencialidad de la actividad para generar nuevos conocimientos y competencias para los alumnos. Un extracto de la opinión de un alumno es el siguiente: "Creo que a estas actividades se le puede sacar mucho provecho, ya que no existen unas bases marcadas y los alumnos pueden resolver los problemas generando sus propias estrategias y utilizando los mecanismos que crean oportunos".

## 5. Conclusiones

Consideramos que en la docencia para futuros maestros se deberían de incorporar actividades específicas que emularan, al nivel adecuado, la futura práctica docente en el aula. Como docentes universitarios no podemos limitarnos a explicar a los futuros maestros como deben actuar o en qué consisten las “buenas prácticas docentes” en el aula de matemáticas. Proponemos involucrar a los EEP en situaciones de aprendizaje que puedan emular su futura práctica profesional. De esta manera dispondrán de experiencias personales en el aula de matemáticas que minimicen el impacto de viejas prácticas derivadas de su etapa como aprendices.

Por otro lado, este tipo de actividades como la expuesta en esta comunicación, permite a los estudiantes reflexionar sobre el conocimiento especializado del contenido matemático que requiere un maestro de primaria para diseñar y gestionar actividades ricas en el aula. Durante las discusiones con los diferentes grupos de EEP se puso de manifiesto la importancia de este conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su influencia en las acciones docentes en el aula. Consideramos que el impacto de este conocimiento es mayor en los alumnos por el hecho de descubrirlo a partir de su propia actuación y experiencia, en lugar de ser transmitido a partir de explicaciones en clases magistrales.

En la actualidad, se utilizan metodologías docentes en la formación inicial del profesorado que distan de las que se pretende que los futuros maestros utilicen en sus aulas. Introducir en la docencia universitaria las mismas metodologías que se proponen a los EEP, proporciona a los futuros maestros ejemplos concretos en los que basarse al diseñar y gestionara futuras actividades en el aula de Primaria. Por consiguiente, consideramos que la forma de motivar el uso de nuevas metodologías en el aula por parte de los futuros maestros es usarlas directamente en sus cursos de formación.

## Referencias

- Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 289-315.

- Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79–96.
- Årlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389–407.
- Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35, 308–309.
- Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Ensor, P. (2001). From preservice mathematics teacher education to beginning teaching: A study in recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 296–320.
- Efthimiou, C. J. & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(3), 253–261.
- Sánchez, V. & García, M. (2009). La Formación de Profesores en Relación con las Matemáticas. *Educação matemática pesquisa*, 11(3), 497–513.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Sriraman, B. & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 247–254. DOI: 10.1007/BF02652808
- Sriraman, B. & Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, 40(2), 205–223.